23-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5-6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждением задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2-3 балла;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

M8.1-1 Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 3333. Найдите все такие N.

Ответ. 2222.

Решение. Заметим, что одно из выписанных чисел будет равно N. Так как сумма двух наибольших выписанных чисел нечетна, то эти числа разной четности. Значит, число 2 – делитель N, тогда второе число – это $\frac{N}{2}$. По условию $N + \frac{N}{2} = 3333$. Отсюда $N = 2222$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

M8.2-1 Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в её середине – точке M. Найдите угол AMD.

Ответ. 90°.

Решение. Выберем на стороне AD точку N так, что $MN \parallel AB$. В параллелограмме $ABMN$ диагональ AM биссектриса угла BAN, поэтому он – ромб. Значит, $MN = BM = \frac{AD}{2}$. Но треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, – прямоугольный. Значит, угол AMD – прямой.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M8.3-1 Числа a и b таковы, что $2a \geq 1$, $b \geq 1$ и $\dfrac{1}{1+4a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} = \dfrac{2}{1+2ab}$. Какие значения может принимать отношение $\dfrac{a}{b}$?

Ответ. $0,5$.

Решение. Докажем, что $2a = b$. Данное равенство приводится к виду $(2a-b)^2(2ab-1) = 0$. Левая часть обращается в 0 только если $2a = b$ либо $2ab = 1$, что при условии $2a \geq 1, b \geq 1$ приводит к равенству $2a = b = 1$.

Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая – 1 балл.

Разобран только один случай равенства — 3 балла.

M8.4-1 Группа школьников направилась на экскурсию. Вначале планировалось сажать в каждый автобус по 22 школьника, но при этом выяснилось, что не хватает места для трёх из них. Когда же один из автобусов уехал, всех школьников удалось рассадить в автобусы поровну. Сколько школьников выехало на экскурсию, если известно, что их было больше 100, но меньше 200?

Ответ. 135.

Решение. Пусть для перевозки школьников был выделен $n+1$ автобус. Тогда общее число школьников равно $22(n+1)+3$. Это число делится на n, поэтому число $\frac{22(n+1)+3}{n} = 22 + \frac{25}{n}$ – целое, откуда $n = 1$, $n = 5$ или $n = 25$. В первом случае на экскурсию выехало 47 школьников, во втором – 135, в третьем – 575. Подходит второй ответ.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

M8.1-2 Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 9999. Найдите все такие N.

Ответ. 6666.

Решение. Заметим, что одно из выписанных чисел будет равно N. Так как сумма двух наибольших выписанных чисел нечетна, то эти числа разной четности. Значит, число 2 – делитель N, тогда второе число – это $\frac{N}{2}$. По условию $N + \frac{N}{2} = 9999$. Отсюда $N = 6666$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

M8.2-2 Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в её середине – точке M. Найдите угол AMD.

Ответ. 90°.

Решение. Выберем на стороне AD точку N так, что $MN \parallel AB$. В параллелограмме $ABMN$ диагональ AM биссектриса угла BAN, поэтому он – ромб. Значит, $MN = BM = \frac{AD}{2}$. Но треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, – прямоугольный. Значит, угол AMD – прямой.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M8.3-2 Числа a и b таковы, что $a \geq 1$, $2b \geq 1$ и $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+4b^2} = \dfrac{2}{1+2ab}$. Какие значения может принимать отношение $\dfrac{a}{b}$?

Ответ. 2.

Решение. Докажем, что $a = 2b$. Данное равенство приводится к виду $(a-2b)^2(2ab-1) = 0$. Левая часть обращается в 0 только если $a = 2b$ либо $2ab = 1$, что при условии $a \geq 1, 2b \geq 1$ приводит к равенству $a = 2b = 1$.

Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая – 1 балл.

Разобран только один случай равенства — 3 балла.

M8.4-2 Группа школьников направилась на экскурсию. Вначале планировалось сажать в каждый автобус по 23 школьника, но при этом выяснилось, что не хватает места для двух из них. Когда же один из автобусов уехал, всех школьников удалось рассадить в автобусы поровну. Сколько школьников выехало на экскурсию, если известно, что их было больше 100, но меньше 200?

Ответ. 140.

Решение. Пусть для перевозки школьников был выделен $n+1$ автобус. Тогда общее число школьников равно $23(n+1)+2$. Это число делится на n, поэтому число $\frac{23(n+1)+2}{n} = 23 + \frac{25}{n}$ – целое, откуда $n = 1$, $n = 5$ или $n = 25$. В первом случае на экскурсию выехало 48 школьников, во втором – 140, в третьем – 600. Подходит второй ответ.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

M9.1-1 К произведению четырёх последовательных чётных натуральных чисел прибавили увеличенное в 8 раз произведение двух средних из них (например: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4 \cdot 6 = 576$). Докажите, что полученное число – точный квадрат.

Решение. Для $n = 2k$ имеем: $n(n+2)(n+4)(n+6) + 8(n+2)(n+4) = ((n+2)(n+4))^2$.

M9.2-1 При каком наименьшем N числа от 1 до N можно разбить на несколько групп с суммой чисел в каждой группе, равной 40?

Ответ. 15.

Решение. Из условия следует, что $\frac{N(N+1)}{2} = 40k$. Отсюда $N(N+1) = 80k = 16 \cdot 5k$. Числа N и $N+1$ взаимно простые, поэтому одно из них должно делиться на 16. Наименьшее подходящее N равно 15, тогда $N+1 = 16$. Это число подходит, так как $15+14+11 = 13+12+10+5 = 9+8+7+6+4+3+2+1 = 40$.

Комментарий. Доказано, что $N \geq 15$ — 5 баллов.

Приведен пример разбиения для $N = 15$ — 2 балла.

M9.3-1 На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $BM = AC$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на отрезок AM. Известно, что $BH = CM$ и $\angle MAC = 30^\circ$. Найдите угол ACB.

Ответ. 15°.

Решение. Пусть $AC = BM = a$ и $CM = BH = b$. Опустим из точки C перпендикуляр CP на прямую AM. Тогда из прямоугольного треугольника CPA получаем, что $CP = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$. Заметим, что треугольники CPM и BHM подобны, поэтому $\frac{a}{2b} = \frac{b}{a}$. Отсюда $a = b\sqrt{2}$, значит, $\angle CMP = 45^\circ$. Но этот угол – внешний для треугольника CMA. Поэтому $\angle MCA = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M9.4-1 На музыкальный вечер пришли пять девятиклассников, пять десятиклассников и один ученик 11 класса. У каждого девятиклассника в этой компании по семь знакомых, а у каждого десятиклассника – по два. Сколько знакомых и из каких классов на этом вечере у ученика 11 класса?

Ответ. 5, все из 9 класса.

Решение. Заметим, что каждый девятиклассник знаком не менее чем с двумя десятиклассниками, поскольку иначе у девятиклассника будет максимум 6 знакомых: 4 других девятиклассника, и по одному человеку из 10 и 11 классов, что противоречит условию. Но тогда между школьниками 9 и 10 классов не менее 10 знакомств. С другой стороны, каждый десятиклассник знаком лишь с двумя другими школьниками, поэтому всего знакомств у десятиклассников с девятиклассниками не более 10. Отсюда следует, что их (знакомств) у десятиклассников с девятиклассниками ровно 10. При этом каждый девятиклассник знаком ровно с двумя десятиклассниками (иначе суммарное число знакомств у десятиклассников будет больше 10), а потому он должен быть знаком со всеми остальными девятиклассниками и учеником 11 класса. И, с другой стороны, каждый десятиклассник знаком ровно с двумя девятиклассниками (иначе суммарное число знакомств между учащимися 9 и 10 классов будет меньше 10), а потому не знаком с остальными учащимися 10 и 11 классов. Таким образом, учащийся 11 класса знаком со всеми девятиклассниками и не знаком ни с одним десятиклассником.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая — 2 балла.

М9.1-2 К произведению четырёх последовательных нечётных натуральных чисел прибавили увеличенное в 8 раз произведение двух средних из них (например: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 8 \cdot 3 \cdot 5 = 225$). Докажите, что полученное число – точный квадрат.

Решение. Для $n = 2k + 1$ имеем: $n(n+2)(n+4)(n+6) + 8(n+2)(n+4) = ((n+2)(n+4))^2$.

М9.2-2 При каком наименьшем N числа от 1 до N можно разбить на несколько групп с суммой чисел в каждой группе, равной 40?

Ответ. 15.

Решение. Из условия следует, что $\frac{N(N+1)}{2} = 40k$. Отсюда $N(N+1) = 80k = 16 \cdot 5k$. Числа N и $N+1$ взаимно простые, поэтому одно из них должно делиться на 16. Наименьшее подходящее N равно 15, тогда $N+1 = 16$. Это число подходит, так как $15+14+11 = 13+12+10+5 = 9+8+7+6+4+3+2+1 = 40$.

Комментарий. Доказано, что $N \geq 15$ — 5 баллов.

Приведен пример разбиения для $N = 15$ — 2 балла.

М9.3-2 На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $BM = AC$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на отрезок AM. Известно, что $BH = CM$ и $\angle MAC = 30^\circ$. Найдите угол ACB.

Ответ. 15°.

Решение. Пусть $AC = BM = a$ и $CM = BH = b$. Опустим из точки C перпендикуляр CP на прямую AM. Тогда из прямоугольного треугольника CPA получаем, что $CP = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$. Заметим, что треугольники CPM и BHM подобны, поэтому $\frac{a}{2b} = \frac{b}{a}$. Отсюда $a = b\sqrt{2}$, значит, $\angle CMP = 45^\circ$. Но этот угол – внешний для треугольника CMA. Поэтому $\angle MCA = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

М9.4-2 На музыкальный вечер пришли шесть девятиклассников, шесть десятиклассников и один ученик 11 класса. У каждого девятиклассника в этой компании по восемь знакомых, а у каждого десятиклассника – по два. Сколько знакомых и из каких классов на этом вечере у ученика 11 класса?

Ответ. 6, все из 9 класса.

Решение. Заметим, что каждый девятиклассник знаком не менее чем с двумя десятиклассниками, поскольку иначе у девятиклассника будет максимум 7 знакомых: 5 других девятиклассников, и по одному человеку из 10 и 11 классов, что противоречит условию. Но тогда между школьниками 9 и 10 классов не менее 12 знакомств. С другой стороны, каждый десятиклассник знаком лишь с двумя другими школьниками, поэтому всего знакомств у десятиклассников с девятиклассниками не более 12. Отсюда следует, что их (знакомств) у десятиклассников с девятиклассниками ровно 12. При этом каждый девятиклассник знаком ровно с двумя десятиклассниками (иначе суммарное число знакомств у десятиклассников будет больше 12), а потому он должен быть знаком со всеми остальными девятиклассниками и учеником 11 класса. И, с другой стороны, каждый десятиклассник знаком ровно с двумя девятиклассниками (иначе суммарное число знакомств между учащимися 9 и 10 классов будет меньше 10), а потому не знаком с остальными учащимися 10 и 11 классов. Таким образом, учащийся 11 класса знаком со всеми девятиклассниками и не знаком ни с одним десятиклассником.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая — 2 балла.

M10.1-1 Два ненулевых числа таковы, что сумма их квадратов больше суммы этих чисел в 21 раз. Также сумма кубов этих чисел больше суммы их квадратов в 21 раз. Во сколько раз сумма четвёртых степеней этих чисел может быть больше суммы их кубов?

Ответ. В 21 раз.

Решение. Обозначим $n = 21$. Тогда условие запишется: $a^2 + b^2 = n(a + b), a^3 + b^3 = n(a^2 + b^2)$. Перемножим эти равенства крест накрест: $(a^2+b^2)n(a^2+b^2) = n(a+b)(a^3+b^3)$. Получим $a^4+2a^2b^2+b^4 = a^4+a^3b+ab^3+b^4$, то есть $(a-b)^2 = 0$ (числа a и b ненулевые). Отсюда $a = b$. Тогда $2a^2 = 2na$, значит, $a = b = n$ и $a^4 + b^4 = n(a^3 + b^3)$.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая — 2 балла.

M10.2-1 Решите уравнение $11\sqrt{x-5^2-7^2} + 5\sqrt{x-11^2-7^2} + 7\sqrt{x-11^2-5^2} = 11^2 + 5^2 + 7^2$.

Ответ. $11^2 + 5^2 + 7^2 = 195$.

Решение. Левая часть уравнения – функция от переменной x, строго возрастающая при росте x. Поэтому каждое значение она принимает не более одного раза. Осталось заметить, что корень $x = 11^2 + 5^2 + 7^2 = 195$ удовлетворяет уравнению.

Комментарий. Ответ угадан, но не доказано, что других корней нет — 4 балла.

M10.3-1 Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол ADC.

Ответ. $60°$.

Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE = 180° - \alpha$, где $\angle ABC = \alpha$. Но мы знаем, что $\angle EID = 90° + \frac{\alpha}{2}$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE = \angle DIE$. Отсюда $180° - \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\alpha = 60°$. Тогда $\angle ADC = \angle ABC = 60°$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M10.4-1 Есть 100 карточек с натуральными числами от 1 до 100 (все числа на карточках различны). Фокусник некоторым образом выложил эти карточки рубашкой вверх в виде квадрата 10×10. После чего он ушел за ширму и предложил зрителю выбрать 10 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду. После этого он предложил зрителю посчитать сумму чисел на 9 из 10 выбранных зрителем карточках и назвать эту сумму. Услышав сумму, фокусник смог назвать число на 10 карточке зрителя. Предложите какой-нибудь способ, как фокусник смог это сделать.

Решение. Пусть фокусник выложит карточки подряд, заполнив первый ряд слева направо числами от 1 до 10, второй ряд слева направо числами от 11 до 20, и так далее. Представим каждое число в виде $10k + m$, где $k = 0, 1, \ldots, 9$ и $m = 1, 2, \ldots, 10$. Заметим, что если выбрать 10 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду, то на выбранных карточках будут числа $10k_1 + m_1$, $10k_2 + m_2$, $\ldots$, $10k_{10} + m_{10}$. При этом среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{10}$ встретятся по разу все числа $0, 1, \ldots, 9$, а среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{10}$ – по разу все числа $1, 2, \ldots, 10$. Значит, сумма чисел на 10 выбранных зрителем карточках всегда равна $10 \cdot (0 + 1 + \cdots + 9) + (1 + 2 + \cdots + 10) = 505$. Поэтому, зная сумму на 9 карточках, фокусник знает число на десятой карточке.

Комментарий. Указано, как правильно разложить карточки, но дальнейших продвижений нет — 1 балл.

M10.1-2 Два ненулевых числа таковы, что сумма их квадратов больше суммы этих чисел в 25 раз. Также сумма кубов этих чисел больше суммы их квадратов в 25 раз. Во сколько раз сумма четвёртых степеней этих чисел может быть больше суммы их кубов?

Ответ. В 25 раз.

Решение. Обозначим $n = 25$. Тогда условие запишется: $a^2 + b^2 = n(a + b), a^3 + b^3 = n(a^2 + b^2)$. Перемножим эти равенства крест накрест: $(a^2+b^2)n(a^2+b^2) = n(a+b)(a^3+b^3)$. Получим $a^4+2a^2b^2+b^4 = a^4+a^3b+ab^3+b^4$, то есть $(a-b)^2 = 0$ (числа a и b ненулевые). Отсюда $a = b$. Тогда $2a^2 = 2na$, значит, $a = b = n$ и $a^4 + b^4 = n(a^3 + b^3)$.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая — 2 балла.

M10.2-2 Решите уравнение $9\sqrt{x - 13^2 - 7^2} + 13\sqrt{x - 9^2 - 7^2} + 7\sqrt{x - 9^2 - 13^2} = 9^2 + 13^2 + 7^2$.

Ответ. $9^2 + 13^2 + 7^2 = 299$.

Решение. Левая часть уравнения – функция от переменной x, строго возрастающая при росте x. Поэтому каждое значение она принимает не более одного раза. Осталось заметить, что корень $x = 9^2 + 13^2 + 7^2 = 299$ удовлетворяет уравнению.

Комментарий. Ответ угадан, но не доказано, что других корней нет — 4 балла.

M10.3-2 Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол AOC.

Ответ. $120°$.

Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE = 180° - \alpha$, где $\angle ABC = \alpha$. Но мы знаем, что $\angle EID = 90° + \frac{\alpha}{2}$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE = \angle DIE$. Отсюда $180° - \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\alpha = 60°$. Тогда $\angle AOC = 2\angle ABC = 120°$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M10.4-2 Есть 100 карточек с натуральными числами от 1 до 100 (все числа на карточках различны). Фокусник некоторым образом выложил эти карточки рубашкой вверх в виде квадрата 10×10. После чего он ушел за ширму и предложил зрителю выбрать 10 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду. После этого он предложил зрителю посчитать сумму чисел на 9 из 10 выбранных зрителем карточках и назвать эту сумму. Услышав сумму, фокусник смог назвать число на 10 карточке зрителя. Предложите какой-нибудь способ, как фокусник смог это сделать.

Решение. Пусть фокусник выложит карточки подряд, заполнив первый ряд слева направо числами от 1 до 10, второй ряд слева направо числами от 11 до 20, и так далее. Представим каждое число в виде $10k + m$, где $k = 0, 1, \ldots, 9$ и $m = 1, 2, \ldots, 10$. Заметим, что если выбрать 10 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду, то на выбранных карточках будут числа $10k_1 + m_1$, $10k_2 + m_2$, $\ldots$, $10k_{10} + m_{10}$. При этом среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{10}$ встретятся по разу все числа $0, 1, \ldots, 9$, а среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{10}$ – по разу все числа $1, 2, \ldots, 10$. Значит, сумма чисел на 10 выбранных зрителем карточках всегда равна $10 \cdot (0 + 1 + \cdots + 9) + (1 + 2 + \cdots + 10) = 505$. Поэтому, зная сумму на 9 карточках, фокусник знает число на десятой карточке.

Комментарий. Указано, как правильно разложить карточки, но дальнейших продвижений нет — 1 балл.

М11.1-1 Решите уравнение $11\sqrt{x^2-13^2-17^2}+13\sqrt{x^2-11^2-17^2}+17\sqrt{x^2-11^2-13^2}=11^2+13^2+$ $+17^2$.

Ответ. $x=\pm\sqrt{11^2+13^2+17^2}=\pm\sqrt{579}$.

Решение. Обозначим $t=x^2$. Тогда левая часть уравнения – функция от $t\geq 0$, строго возрастающая при росте t. Поэтому каждое значение она принимает не более одного раза. Осталось заметить, что корень $t=11^2+13^2+17^2$ удовлетворяет уравнению. Значит, $x=\pm\sqrt{11^2+13^2+17^2}=\pm\sqrt{579}$.

Комментарий. Ответ угадан, но не доказано, что других корней нет — 4 балла.

Потерян отрицательный корень — снять 2 балла.

М11.2-1 На доске написаны числа 1, 4 и 10. Разрешается дописывать на доску числа по следующим правилам. Если на доске написаны числа a и b, то на доску можно записать числа $3a-2b$ и $2a+2b$. Может ли на доске появиться число 2000?

Ответ. Не может. **Решение.** Заметим, что числа 1, 4 и 10 имеют остаток 1 при делении на 3. А так как $3\cdot 1-2\cdot 1=1$ и $2\cdot 1+2\cdot 1=4=3+1$, то и все дописываемые на доску числа будут иметь остаток 1 при делении на 3. Но число 2000 имеет остаток 2 при делении на 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

М11.3-1 Даны параллелограмм $ABCD$ и окружность S. Известно, что окружность S проходит через вершины A, B и D параллелограмма, а также пересекает его стороны BC и DC в точках E и F соответственно. Пусть P и Q – точки пересечения прямых AE и AF с диагональю BD. Найдите длину PQ, если $AP+AQ=10$ и $BD=7$?

Ответ. 3. **Решение.** Докажем, что $AP+AQ=BD+PQ$. Вписанные углы BEA и BDA, опирающиеся на дугу BA, равны. А из параллельности прямых BE и AD следует, что угол BDA равен углу DBE. Значит, треугольник BPE – равнобедренный и $BP=PE$. Аналогично, $DQ=QF$. Тогда $AP+AQ=(AE-PE)+(AF-QF)=AE-BP+AF-DQ=(AE+AF)-(BP+DQ)=(AE+AF)-(BD-PQ)$. Осталось заметить, что $AE=BD$ как диагонали равнобокой трапеции $ABED$ (всякая вписанная трапеция – равнобокая). Аналогично, $AF=BD$ (как диагонали вписанной трапеции $BFDA$). Отсюда $AP+AQ=BD+PQ$. Значит, $PQ=AP+AQ-BD=3$.

Комментарий. Доказано, что треугольник BPE – равнобедренный (или аналогичное утверждение) — 3 балла.

М11.4-1 Есть 81 карточка с натуральными числами от 1 до 81 (все числа на карточках различны). Фокусник некоторым образом выложил эти карточки рубашкой вверх в виде квадрата 9×9. После чего он ушел за ширму и предложил зрителю выбрать 9 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду. После этого он предложил зрителю посчитать сумму чисел на 8 из 9 выбранных зрителем карточках и назвать эту сумму. Услышав сумму, фокусник смог назвать число на 9 карточке зрителя. Предложите какой-нибудь способ, как фокусник смог это сделать.

Решение. Пусть фокусник выложит карточки подряд, заполнив первый ряд слева направо числами от 1 до 9, второй ряд слева направо числами от 10 до 18, и так далее. Представим каждое число в виде $9k+m$, где $k=0,1,\ldots,8$ и $m=1,2,\ldots,9$. Заметим, что если выбрать 9 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду, то на выбранных карточках будут числа $9k_1+m_1$, $9k_2+m_2$, $\ldots$, $9k_9+m_9$. При этом среди чисел $k_1,k_2,\ldots,k_9$ встретятся по разу все числа $0,1,\ldots,8$, а среди чисел $m_1,m_2,\ldots,m_9$ – по разу все числа $1,2,\ldots,9$. Значит, сумма чисел на 9 выбранных зрителем карточках всегда равна $9\cdot(0+1+\cdots+8)+(1+2+\cdots+9)=369$. Поэтому, зная сумму на 8 карточках, фокусник знает число на девятой карточке.

Комментарий. Указано, как правильно разложить карточки, но дальнейших продвижений нет — 1 балл.

M11.1-2 Решите уравнение $19\sqrt{x^2-13^2-5^2}+13\sqrt{x^2-19^2-5^2}+5\sqrt{x^2-19^2-13^2}=19^2+13^2+5^2$.

Ответ. $x=\pm\sqrt{19^2+13^2+5^2}=\pm\sqrt{555}$.

Решение. Обозначим $t=x^2$. Тогда левая часть уравнения – функция от переменной $t\geq 0$, строго возрастающая при росте t. Поэтому каждое значение она принимает не более одного раза. Осталось заметить, что корень $t=19^2+13^2+5^2$ удовлетворяет уравнению. Значит, $x=\pm\sqrt{19^2+13^2+5^2}=\pm\sqrt{555}$.

Комментарий. Ответ угадан, но не доказано, что других корней нет — 4 балла.

Потерян отрицательный корень — снять 2 балла.

M11.2-2 На доске написаны числа 2, 5 и 11. Разрешается дописывать на доску числа по следующим правилам. Если на доске написаны числа a и b, то на доску можно записать числа $3a-2b$ и $2a+2b$. Может ли на доске появиться число 1000?

Ответ. Не может. **Решение.** Заметим, что числа 2, 5 и 11 имеют остаток 2 при делении на 3. А так как $3\cdot 2-2\cdot 2=2$ и $2\cdot 2+2\cdot 2=8=3\cdot 2+2$, то и все дописываемые на доску числа будут иметь остаток 2 при делении на 3. Но число 1000 имеет остаток 1 при делении на 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

M11.3-2 Даны параллелограмм $ABCD$ и окружность S. Известно, что окружность S проходит через вершины A, B и D параллелограмма, а также пересекает его стороны BC и DC в точках E и F соответственно. Пусть P и Q – точки пересечения прямых AE и AF с диагональю BD. Найдите длину PQ, если $AP+AQ=13$ и $BD=9$?

Ответ. 4. **Решение.** Докажем, что $AP+AQ=BD+PQ$. Вписанные углы BEA и BDA, опирающиеся на дугу BA, равны. А из параллельности прямых BE и AD следует, что угол BDA равен углу DBE. Значит, треугольник BPE – равнобедренный и $BP=PE$. Аналогично, $DQ=QF$. Тогда $AP+AQ=(AE-PE)+(AF-QF)=AE-BP+AF-DQ=(AE+AF)-(BP+DQ)=(AE+AF)-(BD-PQ)$. Осталось заметить, что $AE=BD$ как диагонали равнобокой трапеции $ABED$ (всякая вписанная трапеция – равнобокая). Аналогично, $AF=BD$ (как диагонали вписанной трапеции $BFDA$). Отсюда $AP+AQ=BD+PQ$. Значит, $PQ=AP+AQ-BD=4$.

Комментарий. Доказано, что треугольник BPE – равнобедренный (или аналогичное утверждение) — 3 балла.

M11.4-2 Есть 81 карточка с натуральными числами от 1 до 81 (все числа на карточках различны). Фокусник некоторым образом выложил эти карточки рубашкой вверх в виде квадрата 9×9. После чего он ушел за ширму и предложил зрителю выбрать 9 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду. После этого он предложил зрителю посчитать сумму чисел на 8 из 9 выбранных зрителем карточках и назвать эту сумму. Услышав сумму, фокусник смог назвать число на 9 карточке зрителя. Предложите какой-нибудь способ, как фокусник смог это сделать.

Решение. Пусть фокусник выложит карточки подряд, заполнив первый ряд слева направо числами от 1 до 9, второй ряд слева направо числами от 10 до 18, и так далее. Представим каждое число в виде $9k+m$, где $k=0,1,\ldots,8$ и $m=1,2,\ldots,9$. Заметим, что если выбрать 9 карточек так, что никакие две не лежат ни в одном вертикальном, ни в одном горизонтальном ряду, то на выбранных карточках будут числа $9k_1+m_1$, $9k_2+m_2$, …, $9k_9+m_9$. При этом среди чисел $k_1,k_2,\ldots,k_9$ встретятся по разу все числа $0,1,\ldots,8$, а среди чисел $m_1,m_2,\ldots,m_9$ – по разу все числа $1,2,\ldots,9$. Значит, сумма чисел на 9 выбранных зрителем карточках всегда равна $9\cdot(0+1+\cdots+8)+(1+2+\cdots+9)=369$. Поэтому, зная сумму на 8 карточках, фокусник знает число на девятой карточке.

Комментарий. Указано, как правильно разложить карточки, но дальнейших продвижений нет — 1 балл.